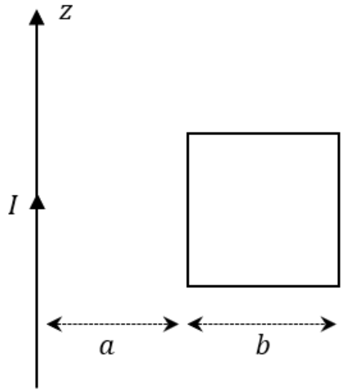
Induction | Chapitre 4 | TD (I4)

Exercice n°1 • Inductance mutuelle entre une spire et un fil *cours*

On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I et une spire carrée.



On rappelle l'expression (en coordonnées cylindriques) du champ magnétique créé par un fil infini d'axe (Oz).

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$$

1) Déterminer l'expression du flux $\phi_{f/s}$ du champ magnétique développé par le fil à travers la spire.

2) En déduire l'expression de l'inductance mutuelle M entre le fil et la spire.

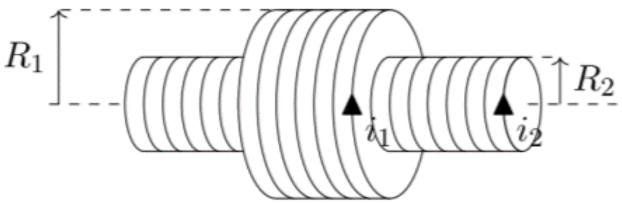
Exercice n°2 • Induction mutuelle entre deux bobines ★☆☆

On rappelle que pour une bobine longue d'axe Δ, le champ magnétique créé à l'intérieur de la bobine est uniforme, colinéaire à Δ, et vaut :

$$B = \frac{\mu_0 N i}{d}$$

avec : N le nombre de spires, i l'intensité traversant la bobine et d la longueur de la bobine. De plus, le champ magnétique est nul à l'extérieur de la bobine.

Considérons deux bobines en influence magnétique (cf. schéma), c'est-à-dire qu'une partie des lignes de champ de chaque bobine traverse l'autre bobine. La bobine 2 peut être considéré comme une bobine longue, et on note $\overrightarrow{B_2}$ le champ qu'elle crée.



1) Faire un schéma de coupe transverse. Indiquer la/les régions de l'espace où $\overrightarrow{B_2}$ est non nul et, dans ces régions, indiquer le sens de $\overrightarrow{B_2}$. Indiquer le sens de $d\overrightarrow{S_1}$, le vecteur surface surface élémentaire de la bobine 1.

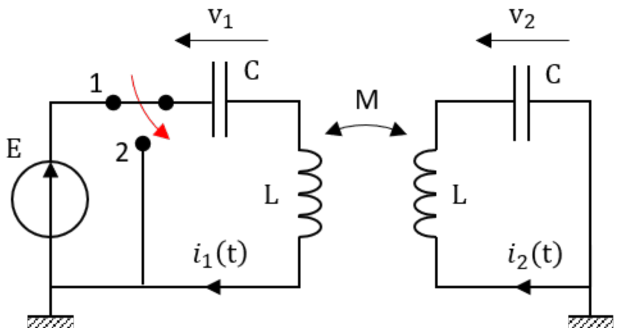
2) En déduire le flux du champ magnétique créé par la bobine 2 passant par une spire de la bobine 1, puis l'expression du flux $\phi_{2/1}$ de la bobine 2 à travers la bobine 1.

3) Déterminer l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux bobines.

4) Déterminer l'expression du flux $\phi_{1/2}$ de la bobine 1 à travers la bobine 2.

Exercice n°3 • Circuits LC couplés ★★☆

On considère le circuit suivant, où deux oscillateurs LC identiques sont couplées par inductance mutuelle M (on admet que $0 < M < L$). On note v_1 et v_2 les tensions aux bornes des condensateurs (en convention récepteur). On note : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre des oscillateurs.



En $t = 0^-$, le système a atteint un régime stationnaire. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur dans la position 2.

<u>Formulaire</u> :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

1) Établir, pour $t > 0$, un système de deux équations différentielles couplées portant sur v_1 et v_2.

2) On pose $\sigma = v_1 + v_2$ et $\delta = v_1 - v_2$. Obtenir les équations différentielles vérifiées par σ et δ. On introduira deux pulsations propres, notée ω_σ et ω_δ.

3) En déduire les expressions de $\sigma(t)$ et $\delta(t)$, puis celles de $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

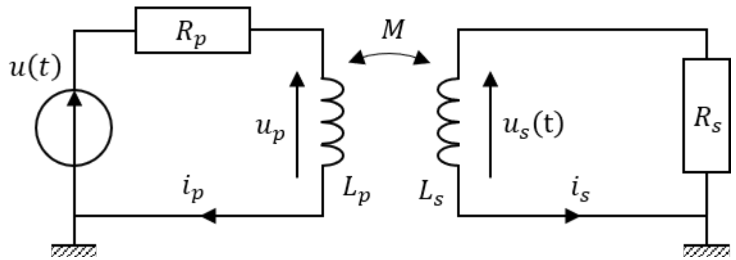
Dans la suite, on considère que le couplage magnétique est faible : $M \ll L$.

4) Faire un développement limité à l'ordre 1 en M/L des pulsations ω_σ et ω_δ.

5) Identifier, dans les expressions de $v_1(t)$ et $v_2(t)$, un terme d'enveloppe. Tracer alors l'allure de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ dans le cas où $L = 50\ M$.

Exercice n°4 • Circuits RL couplés ★★★

On considère deux circuit RL parfaitement couplés magnétiquement.



Cette situation représente en réalité un transformateur, où les pertes par effet Joule ne sont pas négligées. Le circuit primaire (à gauche sur le schéma) est alimenté par un générateur idéal de tension d'amplitude $u(t) = E\ \cos(\omega t)$. Le circuit secondaire (à droite sur le schéma) alimente un dipôle de résistance R_s. Avec les conventions représentées sur le schéma pour les intensités i_p et i_s, le coefficient M est positif.

Notations :

- Pour tout signal $s(t)$, on notera $\underline{S}$ son amplitude complexe en régime sinusoïdal établi.
- On note $m = N_s/N_p$ le rapport entre le nombre de spires des enroulements du secondaire et du primaire.
- On note $\eta = \underline{I_s}/\underline{I_p}$ et $\beta = R_s/R_p$.

1) Établir le système d'équations couplées vérifiées par les intensités $i_p(t)$ et $i_s(t)$.

On se place en régime sinusoïdal établi.

2) En déduire l'expression de η, puis celle de $\underline{I_p}$, en fonction de E et des caractéristiques du circuit.

On considère à présent le cas d'un transformateur idéal :

- le couplage magnétique parfait assure que $M^2 = L_s L_p$ et $L_s/L_p = m^2$;
- les résistances sont négligeables devant les impédances inductives.

Toutes les expressions devront être établies au premier ordre non nul.

3) Montrer que $\underline{I_p} = E/R_{eq}$, où R_{eq} est à déterminer en fonction des caractéristiques du circuit. Interpréter : à quoi est équivalent le circuit secondaire vu du circuit primaire ?

4) Établir les expressions de η puis de $\underline{U_s}/\underline{U_p}$.

5) Que peut-on en déduire concernant la puissance reçue par l'enroulement du primaire et celle fournie par l'enroulement du secondaire ?

6) Établir l'expression de la puissance moyenne fournie par le générateur, notée $\langle \mathcal{P}_g \rangle$, et de celle reçue par R_s, notée $\langle \mathcal{P}_r \rangle$. En déduire le rendement r du transformateur.

7) Pour quelle valeur R_s la puissance $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ est-elle maximale, tous les autres paramètres étant supposés fixes ? On donnera la valeur de β correspondante.

Éléments de correction

❶ 1) et 2) $\phi_{f/s} = MI = \pm \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b+a}{a}\right)$ ❷ 2) $\phi_{2/1} = N_1 \times B_2 S_2 = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 i_2}{d_2}\ \pi R_2^2$. 3) $M = \dfrac{\phi_{2/1}}{i_2} = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2}{d_2}\ \pi R_2^2$. 4) $\phi_{1/2} = M i_1$. ❸ 1) $0 = v_1 + LC\dfrac{d^2 v_1}{dt^2} + MC\dfrac{d^2 v_2}{dt^2}$ et $0 = v_2 + LC\dfrac{d^2 v_2}{dt^2} + MC\dfrac{d^2 v_1}{dt^2}$. 2) $\ddot{\sigma} + \omega_\sigma^2\ \sigma = 0$ et $\ddot{\delta} + \omega_\delta^2\ \delta = 0$ avec : $\omega_\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{LC+MC}}$ et $\omega_\delta = \dfrac{1}{\sqrt{LC-MC}}$. 3) $\sigma(t) = E\ \cos(\omega_\sigma t)$ et $\delta(t) = E\ \cos(\omega_\delta t)$ donc : $E\ \cos\left(\dfrac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2}\ t\right) \cos\left(\dfrac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2}\ t\right)$ et $v_2(t) = -E\ \sin\left(\dfrac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2}\ t\right) \sin\left(\dfrac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2}\ t\right)$. 4) $\omega_\sigma = \omega_0\left(1 - \dfrac{M}{2L}\right)$ et $\omega_\delta = \omega_0\left(1 + \dfrac{M}{2L}\right)$. 5) Cf. correction. ❹ 1) $u(t) = R_p i_p + L_p\dfrac{di_p}{dt} + M\dfrac{di_s}{dt}$ et $0 = R_s i_s + L_s\dfrac{di_s}{dt} + M\dfrac{di_p}{dt}$. 2) $\eta = -\dfrac{j\omega M}{R_s + j\omega L_s}$ et $\underline{I_p} = \dfrac{E}{R_p + j\omega L_p + \dfrac{\omega^2 M^2}{R_s + j\omega L_s}}$. 3) $R_{eq} = R_p + R_s/m^2$. 4) $\eta = -1/m$ et $\dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_p}} = m$. 5) $\mathcal{P}_{r,p}(t) = \mathcal{P}_{f,s}(t)$. 6) $\langle \mathcal{P}_g \rangle = \dfrac{R_{eq} I_p^2}{2}$, $\langle \mathcal{P}_r \rangle = \dfrac{R_s I_p^2}{2m^2}$ et $r = \dfrac{1}{1 + m^2/\beta}$. 7) $\beta = m^2$.